

УДК 62-233.3/9

doi: 10.21685/2072-3059-2024-3-12

Силы в зацеплении планетарно-цевочной передачи с сателлитом, имеющим эксцентриситет

Е. А. Чуфистов¹, О. Е. Чуфистов²

¹Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия

¹ea_tchufistov@mail.ru, ²tchufistov@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Силы, действующие в зацеплении передачи, влияют на ресурс самого зацепления и опор сателлитов. Количество факторов, от которых зависит распределение нагрузки в зацеплении, весьма велико, в том числе модификация профилей зубьев, погрешности изготовления передачи и изменение относительного положения сателлита, цевочного колеса и выходного вала при ее работе. Существующие методики статического расчета передачи не в полной мере учитывают это влияние. Целью работы является совершенствование статического анализа передачи и повышение точности расчета. *Материалы и методы.* В работе методом кинематического анализа определяются перемещения в контактных парах зацепления. Далее для определения характеристик упругости используется классическая контактная механика Герца. Силы в зацеплении рассчитываются с помощью итерационной процедуры анализа состояния контактов. Для получения количественных характеристик применено компьютерное моделирование в системе MathCad. *Результаты.* Созданы математическая модель, алгоритм и программа расчета сил, возникающих в планетарно-цевочной передаче с модификацией профиля зубьев сателлита и эксцентриситетом сателлита. Выполнены расчеты и показано, как в этом случае изменяются силы в контактных парах. *Выводы.* Предложенное решение позволяет учитывать совместное влияние равномерной модификации профилей зубьев и эксцентриситета сателлита на нагрузки в зацеплении. Исследования показали, что эксцентриситет может существенно изменять картину нагружения зацепления передачи, что необходимо учитывать в инженерном расчете.

Ключевые слова: планетарно-цевочные передачи, эксцентриситет сателлита, силы в контактах, коэффициент увеличения максимальной силы

Для цитирования: Чуфистов Е. А., Чуфистов О. Е. Силы в зацеплении планетарно-цевочной передачи с сателлитом, имеющим эксцентриситет // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2024. № 3. С. 128–141. doi: 10.21685/2072-3059-2024-3-12

Forces in the engagement of planetary-pinion gear with satellite having eccentricity

E.A. Tchufistov¹, O.E. Tchufistov²

¹Penza State University, Penza, Russia

²Penza State Technological University, Penza, Russia

¹ea_tchufistov@mail.ru, ²tchufistov@mail.ru

Abstract. *Background.* The forces acting in the engagement of the gear affect the resource of the engagement itself and the satellite supports. The number of factors on which the load

© Чуфистов Е. А., Чуфистов О. Е., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

distribution in the engagement depends is very large, including modification of tooth profiles, manufacturing inaccuracy of the gear and a change in the relative position of the satellite, the pinwheel and the output shaft during its operation. The existing methods of static gear calculation do not fully take into account this influence. The purpose of the study is to improve the static analysis of gear and increase the accuracy of calculation. *Materials and methods.* In this work, the displacements in the contact pairs of engagement are determined using the method of kinematic analysis. Next, classical Hertzian contact mechanics is used to determine the elasticity characteristics. The forces in the engagement are calculated using an iterative procedure for analyzing the state of the contacts. To obtain quantitative characteristics, computer modeling in the Mathcad system was used. *Results.* A mathematical model, algorithm and program for calculating the forces arising in the planetary-pinion gear with modification of the satellite teeth profile and satellite eccentricity have been created. Calculations are performed and it is shown how, in this case, the forces in the contact pairs change in the gear. *Conclusions.* The proposed solution makes it possible to take into account the combined influence of a uniform modification of the tooth profiles and the eccentricity of the satellite on the loads in the engagement. Research has shown that eccentricity can significantly change the load pattern of the gear engagement, which must be taken into account in engineering calculation.

Keywords: planetary-pinion gears, satellite eccentricity, forces in contacts, coefficient of maximum force increase

For citation: Tchufistov E.A., Tchufistov O.E. Forces in the engagement of planetary-pinion gear with satellite having eccentricity. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Engineering sciences*. 2024;(3):128–141. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3059-2024-3-12

Введение

Одно из первых и полных исследований сил в точно изготовленной планетарной цевочной передаче выполнено В. Н. Кудрявцевым [1]. Влияние зазоров в зацеплении и выходном механизме на нагруженность планетарно-цевочных передач, по-видимому, впервые изучалось в [2]. В результате теоретических и экспериментальных исследований авторы установили закон распределения нагрузки по элементам передачи и сделали вывод о необходимости учета погрешности изготовления при выполнении расчетов. Последующие исследования [3–16] показали, что зазоры влияют на комплекс взаимосвязанных величин: люфт и кинематическую погрешность вращения, силы, действующие в зацеплении, нагрузочную способность, потери в зацеплении и КПД, крутильную жесткость передачи и др. Влияние конструктивных параметров на силы и контактные напряжения представлены в работе С. К. Малхотра и М. А. Парамешваран [3]. J. G. Blanche и D. C. H. Yang исследовали влияние допусков обработки на зазор и пульсацию крутящего момента циклоидального привода [4]. L. Lixing, L. Xin, H. Weidong, Q. Yuanmei выполнили анализ сил в точной циклоидной передаче. В работе [6] представлен анализ крутильной жесткости циклоидной передачи с учетом допусков. М. Благоевич [7] предложил методику расчета деформаций зубьев циклоидного диска и зазоров, возникающих между циклоидным диском и зубчатым венцом. Li Xin Xu и др. [8] создали аналитическую модель для прогнозирования нагрузок на элементы циклоидального редуктора при наличии зазоров. Ning Jiang, Shuting Wang и др. [9] рассмотрели влияние коррекции профиля на деформации и зазоры, а также на количество зубьев, которые одновременно передают нагрузку. В работах авторов данной статьи [10–16] также изучалось

влияние зазоров в зацеплении на свойства, проявляющиеся в неработающей и работающей передачах. Однако многие эффекты до сих пор слабо изучены. В частности, совместное влияние зазоров в зацеплении и эксцентриситета сателлита на положение и размеры зоны контакта и распределение нагрузки в зацеплении.

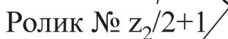
1. Аналитическое решение

В точной планетарно-цевочной передаче все цевки (ролики) находятся в одновременном контакте с зубьями сателлита. При изготовлении деталей передачи возникают погрешности, поэтому существует опасность, что при сборке передачи детали займут положения, при которых собираемость передачи будет невозможна. Для сборки передачи и обеспечения смазки необходимы гарантированные зазоры между зубьями сателлитов и цевками (роликами) цевочного колеса. Поэтому при проектировании и изготовлении передачи вводят модификацию профилей зубьев. Кроме собираемости, она позволяет улучшать показатели передачи.

Широко применяется модификация, при которой профили зубьев сателлитов эквидистантны теоретическому. Такой метод модификации относят к равномерно корректирующим профили зубьев. При этом в зацеплении образуются одинаковые зазоры. В передаче с зазором в зацеплении без нагрузки движение должно передаваться одной парой «цевка – зуб сателлита», т.е. зацепление однопарное. Под нагрузкой образуется зона контакта, величина и положение которой зависят от приложенного вращающего момента, модификации профилей зубьев сателлитов, жесткости контактной пары и технологических погрешностей. К числу основных погрешностей относится эксцентриситет сателлита, когда ось зубчатого венца смещена относительно оси отверстия под подшипник.

Рассмотрим передачу в обратном движении при неподвижном входном вале и вращающихся сателлите и цевочном колесе (рис. 1). В качестве исходного принимаем положение, когда ролик (цевка) № 1 цевочного колеса располагается на вертикальной оси, τ_{ci} – угол расположения i -й цевки на цевочном колесе, он отсчитывается против часовой стрелки от цевки № 1. На рис. 1 r_{w1} – радиус начальной окружности сателлита, $r_{w1} = z_1 a_w$; z_1 – число зубьев сателлита; r_{w2} – радиус начальной окружности цевочного колеса, $r_{w2} = z_2 a_w$; z_2 – число цевок цевочного колеса; a_w – межосевое расстояние передачи; r_2 – радиус окружности расположения цевок (радиус цевочного колеса). Отношение $\lambda = r_{w2}/r_2$ называют коэффициентом укорочения эписиклоиды.

В увеличенном масштабе на рис. 1 показан фрагмент, на котором O_1 – центр отверстия в сателлите, O' – центр зубчатого венца сателлита, O_2 – центр цевочного колеса, e_s – эксцентриситет, расстояние $O_1 O'_1$. Направление вектора эксцентриситета задается углом ξ , который он образует с вертикальной осью симметрии $O_1 O_2$ передачи. Вследствие такого направленного смещения зазоры в зацеплении изменяются, теперь они уже не одинаковые в различных парах «зуб сателлита – цевка».



В передаче с спутником, имеющим эксцентриситет

суммарный угол поворота $\beta = \beta_{\text{л}} + \beta_{\text{впр}}$. Деформации в контактных парах:

$$\delta_i = \beta l_1 - e_s \cos(\xi + \theta_i) - \Delta_z. \quad (1)$$

действующей в зацеплении, и принимаем $l_i = r_{w1} \sin \theta_i$.

Нормальные силы в контактных парах при $\delta_i > 0$:

$$F_i = c_{3i} \cdot \delta_i, \quad (2)$$

где c_{3i} – коэффициент жесткости контактной пары в зацеплении.

Максимальное значение силы соответствует максимальной деформации. Угол θ_m , при котором деформация достигает максимального значения, определим из условия $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$. Для этого преобразуем (1) к следующему виду:

$$\delta_i = (\beta r_{w1} + e_s \sin \xi) \sin \theta - e_s \cos \xi \cos \theta - \Delta_z,$$

или

$$\delta_i = a \sin \theta - b \cos \theta - \Delta_z, \quad (3)$$

где $a = \beta r_{w1} + e_s \sin \xi$, а $b = e_s \cos \xi$.

Из условия

$$\frac{d\delta}{d\theta} = a \cos \theta + b \sin \theta = 0$$

получаем соотношение для определения угла θ_m , соответствующего максимальной деформации и силе

$$\operatorname{tg} \theta_m = -\frac{a}{b}. \quad (4)$$

Подставим полученное соотношение в (3) и, учитывая, что

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \text{ а } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

или

$$\sin \theta_m = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \cos \theta_m = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

получим

$$\delta_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z, \quad (5)$$

$$F_{\max 3.э} = c_3 \left(\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z \right), \quad (6)$$

$$F_{i3.э} = c_3 (a \sin \theta_i - b \cos \theta_i - \Delta_z). \quad (7)$$

Из (3) и (6), учитывая, что $l_i = r_{w1} \sin \theta_m$, получаем угол поворота сателлита $\beta_{\text{л}}$, необходимый для выбора люфта:

$$\beta_{\text{л}} = \frac{1}{r_{w1}} \left(\frac{\Delta_z + e_s \cos \xi \cos \theta_m}{\sin \theta_m} - e_s \sin \xi \right). \quad (8)$$

Деформация в контактной паре:

$$\delta_i = \beta_{\text{упр}} r_{w1} \sin \theta - e_s \cos \xi \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \theta_m} \right) - \Delta_z \left(1 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta_m} \right). \quad (9)$$

Вращающий момент на сателлите, создаваемый силами, действующими на зубья сателлита:

$$T_c = \sum F_i l_i . \quad (10)$$

В зацеплении без зазора и эксцентриситета $F_{i\delta.3} = c_3 \beta r_{w1} \sin \theta_i$, $F_{\max \delta.3} = c_3 \beta r_{w1}$ и $F_i = F_{\max \delta.3} \sin \theta_i$. Подставляя приведенные соотношения в (10), получим

$$T_c = F_{\max \delta.3} r_{w1} \sum_0^{\pi} \sin^2 \theta_i . \quad (11)$$

В зацеплении с зазором и эксцентриситетом сателлита:

$$F_{i3.э} = F_{\max 3.э} \frac{a \sin \theta_i - b \cos \theta_i - \Delta_z}{\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z} . \quad (12)$$

Подставив (12) в (10), получим

$$T_c = F_{\max 3.э} \frac{r_{w1} \sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i - b \sin \theta_i \cos \theta_i)}{\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z} . \quad (13)$$

При одинаковых моментах в передачах, приравнявая правые части (11) и (13), получим

$$F_{\max 3.э} \frac{r_{w1} \sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i - b \sin \theta_i \cos \theta_i)}{\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z} = F_{\max \delta.3} r_{w1} \sum_0^{\pi} \sin^2 \theta_i .$$

Введем коэффициент увеличения максимальной силы в зацеплении передачи с зазором и эксцентриситетом по сравнению с точной передачей:

$$k_z = \frac{F_{\max 3.э}}{F_{\max \delta.3}} = \frac{\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z \right) \sum_0^{\pi} \sin^2 \theta_i}{\sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i - b \sin \theta_i \cos \theta_i)} . \quad (14)$$

Суммирование в числителе формулы (14) выполняется для $i \in [0, z_2/2]$, а в знаменателе – для зоны контакта $\theta_1 \dots \theta_2$. Ее размеры могут быть определены из условия $\delta_{1,2} = 0$ следующим образом. Учитывая (3), получим

$$a^2 (1 - \cos^2 \theta) = b^2 \cos^2 \theta + 2 \Delta_z b \cos \theta + \Delta_z^2 ,$$

отсюда

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{-\Delta_z b \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - \Delta_z^2}}{a^2 + b^2}, \quad (15)$$

и

$$\theta_{1,2} = \arccos \left[\frac{-\Delta_z b \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - \Delta_z^2}}{a^2 + b^2} \right]. \quad (16)$$

Сумму в числителе формулы (14) вычислим по соотношению

$$\sum \sin^2 \theta_i \approx \frac{\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta}{2\pi/z_2} = \frac{z_2}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{z_2}{4}. \quad (17)$$

Аналогично выражение в знаменателе $\sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i)$ вычислим как

$$\sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i) \approx \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta - \Delta_z \sin \theta) d\theta}{2\pi/z_2}.$$

Проинтегрировав данное выражение, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i) \approx \\ & \approx \frac{z_2}{4\pi} \left\{ a \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \right] - 2\Delta_z (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как

$$\sin \theta_i = \sin \tau_{\Pi i} / \left(1 - 2\lambda \cos \tau_{\Pi i} + \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta_i = (\lambda - \cos \tau_{\Pi i}) / \left(1 - 2\lambda \cos \tau_{\Pi i} + \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \tau_{\Pi i} (\lambda - \cos \tau_{\Pi i}) / \left(1 - 2\lambda \cos \tau_{\Pi i} + \lambda^2 \right).$$

Вычислим эту сумму по формуле

$$\sum_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta_i \cos \theta_i \approx -\frac{z_2}{2\pi} \int_{\tau_{\Pi 1}}^{\tau_{\Pi 2}} \frac{\sin \tau_{\Pi} (\lambda - \cos \tau_{\Pi}) d\tau_{\Pi}}{1 - 2\lambda \cos \tau_{\Pi} + \lambda^2}. \quad (19)$$

Знак минус определяется тем, что θ_1 соответствует углу $\tau_{и1}$, а θ_2 – $\tau_{и2}$. Интеграл, входящий в выражение (16):

$$\int_{\tau_{и1}}^{\tau_{и2}} \frac{\sin \tau_{и} (\lambda - \cos \tau_{и}) d\tau_{и}}{1 - 2\lambda \cos \tau_{и} + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\cos \tau_{и2} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}}{\cos \tau_{и1} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}} \right| + \cos \tau_{и1} - \cos \tau_{и2} \right). \quad (20)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\theta_1}^{\theta_2} \left(a \sin^2 \theta_i - \Delta_z \sin \theta_i - b \sin \theta_i \cos \theta_i \right) = \\ & = \frac{z_2}{4\pi} \left\{ a \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{z_2}{4\pi} \left\{ 2\Delta_z (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{b}{\lambda} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\cos \tau_{и2} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}}{\cos \tau_{и1} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}} \right| + \cos \tau_{и1} - \cos \tau_{и2} \right) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Коэффициент увеличения силы:

$$\begin{aligned} k_z = \pi \left(\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z \right) \cdot & \left[a \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \right] - \right. \\ & \left. - 2\Delta_z (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{b}{\lambda} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\cos \tau_{и2} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}}{\cos \tau_{и1} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}} \right| + \cos \tau_{и1} - \cos \tau_{и2} \right) \right]^{-1}. \quad (21) \end{aligned}$$

Углы θ_1, θ_2 определяются по формуле (16), при этом углу θ_1 соответствует знак плюс перед радикалом, а углу θ_2 – минус.

Из (15) получаем

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2 + \Delta_z^2}}{a^2 + b^2}. \quad (22)$$

Входящее в формулу (21) выражение $\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2$ равно

$$2(\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2) = \frac{4\Delta_z (a^2 - b^2) \sqrt{a^2 + b^2 + \Delta_z^2}}{a^2 + b^2}.$$

Теперь формулу (19) можно привести к следующему, более удобному, виду:

$$k_z = \frac{\pi \left(\sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z \right)}{a} \cdot \left[(\theta_2 - \theta_1) - \frac{2\Delta_z (a^2 + 3b^2) \sqrt{a^2 + b^2} - \Delta_z^2}{(a^2 + b^2)^2} - \right. \\ \left. - \frac{b}{a\lambda} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\cos \tau_{\text{ц}2} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}}{\cos \tau_{\text{ц}1} - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}} + \cos \tau_{\text{ц}1} - \cos \tau_{\text{ц}2} \right| \right) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Значения $\cos \tau_{\text{ц}1,2}$ можно определить по следующим формулам:

$$\begin{cases} \cos \tau_{\text{ц}1} = \lambda \sin^2 \theta_1 - \cos \theta_1 \sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta_1)}, \\ \cos \tau_{\text{ц}2} = \lambda \sin^2 \theta_2 - \cos \theta_2 \sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta_2)}. \end{cases}$$

В соответствии с (3) и (8) имеем

$$a = \beta r_{w1} + e_s \sin \xi = \beta_{\text{упр}} r_{w1} + \frac{\Delta_z + e_s \cos \xi \cos \theta_m}{\sin \theta_m}.$$

Решение этого уравнения относительно величины a приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому на первом этапе итерации учитываем, что θ_m не намного отличается от $\pi/2$, тогда $a \approx \beta_{\text{упр}} r_{w1} + \Delta_z$. Угол упругого поворота $\beta_{\text{упр}}$ приближенно определим по контактной паре, в которой действует максимальная сила

$$\beta_{\text{упр}} = \frac{F_{\text{max 3.э}}}{cr_{w1}} = \frac{4k_z T_s}{cr_{w1}^2 z_2},$$

откуда получаем

$$a = \frac{4k_z T_s}{cr_{w1} z_2} + \Delta_z. \quad (24)$$

Общее сближение центров кривизны зуба и ролика для наиболее нагруженной пары:

$$\delta_{\text{max}} = 2F_{\text{max 3.э}} \frac{1 - \nu^2}{\pi E b} \left[\ln \frac{\pi E b \rho_{si} r_r}{2F_i (1 - \nu^2) \rho_{\text{comi}}} + 0,815 \right] = \\ = 2F_{\text{max 3.э}} \frac{1 - \nu^2}{\pi E b} \left[\ln \frac{\pi E b |\rho_t|}{2F_i (1 - \nu^2)} + 0,815 \right],$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; b – ширина сателлита; ρ_{si} – радиус кривизны зуба сателлита; r_r – радиус ролика (цевки); ρ_{comi} – приведенный радиус кривизны в точке контакта; ρ_t – радиус кривизны эпициклоиды.

Коэффициент жесткости, входящий в формулу (24), примем в следующем виде [11]:

$$c_{k.c} = (k_k \pi E b) \left\{ 2(1 - \nu^2) \left[\ln \frac{z_2 r_{w1} \pi E b r_2 \sqrt{1 - \lambda^2}}{8 k_z T_s (1 - \nu^2)} + 0,815 \right] \right\}^{-1}, \quad (25)$$

где k_k – коэффициент, учитывающий особенности конструкции узла, $k_k < 1$.

Силы, действующие в контакте, определяют по формуле (7). Коэффициент k_z , входящий в формулу (25), а опосредовано и в формулу (7), до расчета неизвестен. Поэтому расчет выполняется методом итераций. Вначале k_z принимается без учета эксцентриситета [15], рассчитываются силы и момент сил. Затем корректируется угол упругого поворота для того, чтобы момент на сателлите был равен заданному, вновь рассчитываются силы, моменты, и так до достижения требуемой точности.

2. Интерпретация решения

Приведенные модели позволяют определить влияние модификации профиля зубьев и погрешностей изготовления на силы, действующие в зацеплении. Эти модели применимы для неподвижной статически нагруженной передачи. На рис. 2, 3 показаны результаты расчетов, выполненных в MathCad, при следующих параметрах передачи: вращающий момент на сателлите $T_c = 350 \text{ Н} \cdot \text{м}$, ресурс передачи 10 000 ч, режим работы тяжелый, передаточное отношение $u = 33$, число сателлитов $n_c = 2$, межосевое расстояние $a_w = 1,985 \text{ мм}$.

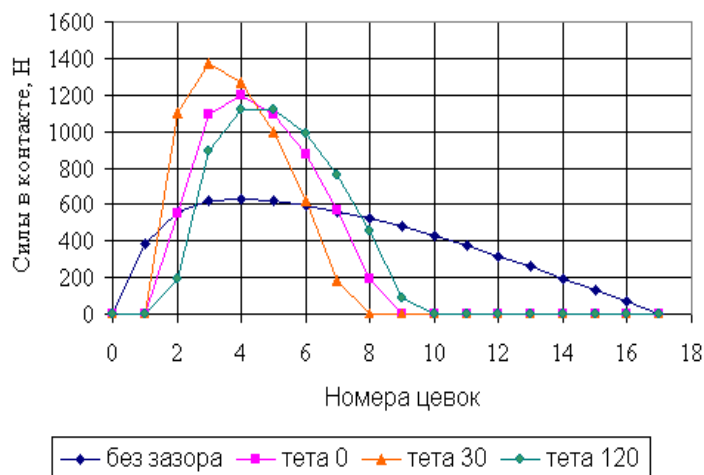


Рис. 2. Силы в контактных парах зацепления: эксцентриситет 0,0025 мм

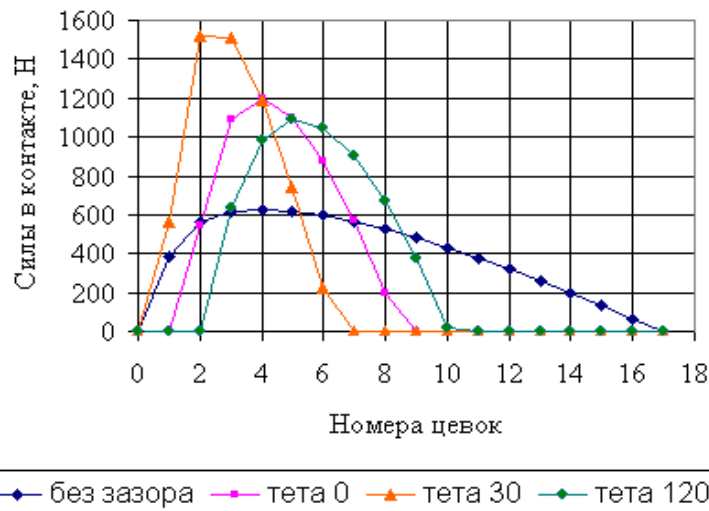


Рис. 3. Силы в контактных парах зацепления: эксцентриситет 0,005 мм

Дополнительные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	Зазор, мм	Эксцентриситет	Угол эксцентриситета, град	Угол поворота сателлита, рад	Угол упругого поворота сателлита, рад	a , мм	b , мм	Θ_m , рад
1	0,01	0	—	$2,068 \cdot 10^{-5}$	$2,068 \cdot 10^{-5}$	—	—	$\pi/2$
2			—	$1,903 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	—	—	$\pi/2$
3		0,0025	30	$1,74 \cdot 10^{-4}$	$4,39 \cdot 10^{-5}$	$1,2647 \cdot 10^{-2}$	$2,165 \cdot 10^{-3}$	1,740
4			120	$1,545 \cdot 10^{-4}$	$3,60 \cdot 10^{-5}$	$1,2285 \cdot 10^{-2}$	$-1,25 \cdot 10^{-3}$	1,469
5		0,005	30	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-5}$	$1,2522 \cdot 10^{-2}$	$4,33 \cdot 10^{-3}$	1,904
6			120	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$3,50 \cdot 10^{-5}$	$1,1987 \cdot 10^{-2}$	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	1,365

Влияние эксцентриситета на силу в контактной паре определяется расположением вектора эксцентриситета по отношению к контактной нормали. Если угол ξ , определяющий направление вектора эксцентриситета, меньше $\pi/2 - \theta$, то эксцентриситет увеличивает зазор в контактной паре и уменьшает силу, а если больше, то уменьшает зазор и увеличивает силу. Если вектор смещения перпендикулярен контактной нормали, то эксцентриситет не меняет зазора в соответствующей паре. Максимальное уменьшение зазора и, соответственно, увеличение деформации и контактной силы, приходится на контактные пары, положение которых удовлетворяет формуле (4). Для передач без эксцентриситета это пары, для которых $\theta \approx \pi/2$. Для передачи с $\xi = 30^\circ$ это соответствует 3–4-й парам при эксцентриситете $e = 0,0025$ мм и 2–3-й парам при $e = 0,005$ мм, а для $\xi = 120^\circ$ – парам 4–5 при $e = 0,0025$ мм и парам 5–6 при $e = 0,005$ мм. Это привело к тому, что при $\xi = 30^\circ$ в зоне, близкой к полюсу зацепления, где и без эксцентриситета силы большие, они еще

увеличились. При $\xi = 120^\circ$ максимальное увеличение смещено в зону, удаленную от полюса. За счет этого максимальная сила в этой передаче по сравнению с передачей без эксцентриситета даже уменьшилась. В работающей передаче относительное положение звеньев и нагрузки циклически меняются. При этом амплитуда сил, по-видимому, возрастет.

Заключение

Смещение зубчатого венца сателлита относительно оси отверстия под подшипник, эксцентриситет сателлита, меняет картину силового нагружения зацепления. В контактных парах, в направлении которых смещен зубчатый венец, силы возрастают. При этом меняются также положение и размеры зоны контакта. Вследствие этого меняется также угол упругого поворота сателлита. Приведенные результаты показывают, что эксцентриситет может существенно изменять максимальные нагрузки. Для более полного выявления влияния эксцентриситета на закономерности распределения нагрузки в зацеплении в работающей передаче требуются дополнительные исследования.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Н. Планетарные передачи. М. ; Л. : Машиностроение, 1966. 308 с.
2. Юдин В. А., Лобастов В. К. К теории проектирования «реальных» планетарных передач с цевочным внеполюсным зацеплением // Теория передач в машинах. М. : Наука, 1971. С. 83–95.
3. Malhotra S. K., Parameswaran M. A. Analysis of a Cycloid Speed Reducer // Mechanism and Machine Theory. 1983. Vol. 18, № 6. P. 491–499. doi: 10.1016/0094-114X(83)90066-6
4. Blanche J. G., Yang D. C. H. Cycloid Drives with Machining Tolerances // ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. 1989. Vol. 111 (3). P. 337–344.
5. Lixing L., Xin L., Weidong H., Yuanmei Q. Accurate Force Analysis on Cycloid Drive // Proceeding of the 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference DETC2011, August 28–31. Washington, DC, USA, 1997.
6. Anh Duc Pham. Torsional rigidity analysis of cycloid reducers considering tolerances // 16th Asia Pacific Vibration Conference 24–26 November, 2015 HUST. Hanoi, Vietnam, 2015. doi: 10.15625/vap.2016.000088
7. Blagojevic M. Analysis of Clearances and Deformations at Cycloid Disc // Machine design. 2014. Vol. 6, № 3, P. 79–84.
8. Xu Li-xin A dynamic model to predict the number of pins to transmit load in a cycloidal reducer with assembling clearance // Article in Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. doi: 10.1177/0954406218809732
9. Jiang N., Wang Sh., Xie X., Yuan X., Yang A., Zhang J. A vectorial modification methodology based on an efficient and accurate cycloid tooth profile model // Precision Engineering. 2022. Vol. 73. P. 435–456.
10. Чуфистов Е. А., Чуфистов О. Е. Гуревич Ю. Е., Курманов Р. М. Влияние зазоров на силы в зацеплении в планетарно-цевочной передаче // Материалы и технологии XXI века : сб. статей XIV Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2016. С. 123–130. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26305716>
11. Artyomov I. I., Tchufistov E. A., Tchufistov O. E. Analysis of static loading of meshing in planetary cycloid gear // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 734. P. 012056.

12. Артемов И. И., Шептунов С. А., Чуфистов Е. А. [и др.]. Моделирование силового взаимодействия в зацеплении планетарно-цевочной передачи // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2019. № 2 (49). С. 75–80.
13. Tchufistov E. A., Tchufistov O. E. Loading of satellite bearing of planetary cycloid gear by forces acting in meshing // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 862. doi: 10.1088/1757-899X/862/3/032042
14. Tchufistov E. A., Tchufistov O. E. Simulation of satellite bearings loading in planetary cycloid gear // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 971 (4).
15. Чуфистов Е. А., Чуфистов О. Е. Закономерности нагружения планетарно-цевочной передачи при ее работе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2023. № 1. С. 171–178.
16. Чуфистов Е. А., Чуфистов О. Е. Изменение радиальной силы в зацеплении планетарно-цевочной передачи // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2023. № 2. С. 142–155.

References

1. Kudryavtsev V.N. *Planetarnye peredachi = Planetary gears*. Moscow; Leningrad: Mashinostroenie, 1966:308. (In Russ.)
2. Yudin V.A., Lobastov V.K. Towards the theory of designing “real” planetary gears with pinion off-pole engagement. *Teoriya peredach v mashinakh = Theory of gears in machines*. Moscow: Nauka, 1971:83–95. (In Russ.)
3. Malhotra S.K., Parameswaran M.A. Analysis of a Cycloid Speed Reducer. *Mechanism and Machine Theory*. 1983;18(6):491–499. doi: 10.1016/0094-114X(83)90066-6
4. Blanche J.G., Yang D.C.H. Cycloid Drives with Machining Tolerances. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1989;111(3):337–344.
5. Lixing L., Xin L., Weidong H., Yuanmei Q. Accurate Force Analysis on Cycloid Drive. *Proceeding of the 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference DETC2011, August 28–31*. Washington, DC, USA. 1997.
6. Anh Duc Pham. Torsional rigidity analysis of cycloid reducers considering tolerances. *16th Asia Pacific Vibration Conference 24–26 November, 2015 HUST*. Hanoi, Vietnam, 2015. doi: 10.15625/vap.2016.000088
7. Blagojevis M. Analysis of Clearances and Deformations at Cycloid Disc. *Machine design*. 2014;6(3):79–84.
8. Xu Li-xin A dynamic model to predict the number of pins to transmit load in a cycloidal reducer with assembling clearance. *Article in Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2018. doi: 10.1177/0954406218809732
9. Jiang N., Wang Sh., Xie X., Yuan X., Yang A., Zhang J. A vectorial modification methodology based on an efficient and accurate cycloid tooth profile model. *Precision Engineering*. 2022;73:435–456.
10. Chufistov E.A., Chufistov O.E. Gurevich Yu.E., Kurmanov R.M. Effect of clearances on engagement forces in planetary-pinion gear. *Materialy i tekhnologii XXI veka: sb. statey XIV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. = Materials and technologies of the 21st century: proceedings of the 14th International scientific and engineering conference*. Penza, 2016:123–130. (In Russ.). Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26305716>
11. Artyomov I.I., Tchufistov E.A., Tchufistov O.E. Analysis of static loading of meshing in planetary cycloid gear. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2020;734:012056.
12. Artemov I.I., Sheptunov S.A., Chufistov E.A. et al. Modeling of force interaction in planetary pinion gear engagement. *Vestnik MGTU «STANKIN» = Bulletin of MSTU “STANKIN”*. 2019;(2):75–80.

13. Tchufistov E.A., Tchufistov O.E. Loading of satellite bearing of planetary cycloid gear by forces acting in meshing. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 862. doi: 10.1088/1757-899X/862/3/032042
14. Tchufistov E.A., Tchufistov O.E. Simulation of satellite bearings loading in planetary cycloid gear. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;971(4).
15. Chufistov E.A., Chufistov O.E. Loading patterns of planetary pinion gear during its operation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences*. 2023;(1):171–178. (In Russ.)
16. Chufistov E.A., Chufistov O.E. Hanging the radial force un the engagement of the planetary pinion gear. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences*. 2023;(2):142–155. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Евгений Алексеевич Чуфистов

кандидат технических наук, профессор,
профессор кафедры транспортных
машин, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: ea_tchufistov@mail.ru

Evgeniy A. Tchufistov

Candidate of engineering sciences,
professor, professor of the sub-department
of transport machines, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Олег Евгеньевич Чуфистов

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры технологии
машиностроения, Пензенский
государственный технологический
университет (Россия, г. Пенза,
пр. Байдукова / ул. Гагарина, 1а/11)

E-mail: tchufistov@mail.ru

Oleg E. Tchufistov

Candidate of engineering sciences,
associate professor, associate professor
of the sub-department of mechanical
engineering technology, Penza State
Technological University (1a/11 Baydukova
passage / Gagarina street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 19.02.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.04.2024

Принята к публикации / Accepted 30.05.2024